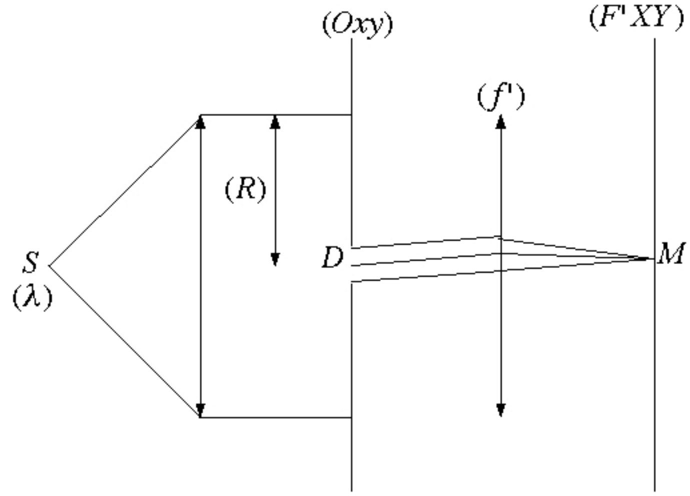
Ecrans complémentaires et diffraction aléatoire.

Question 1 :

Comparer les figures de diffraction à l'infini obtenues par deux diaphragmes complémentaires, c'est-à-dire que le second est transparent là où le premier est opaque et réciproquement.



On rappelle que l'amplitude complexe, en un point $M(X,Y)$ du plan focal de la seconde lentille de distance focale f', de la figure de diffraction obtenue par un diaphragme $\mathcal{D}$ du plan xOy éclairé par une source monochromatique (de longueur d'onde λ) à l'infini dans la direction de Oz est donnée par la formule suivante qui traduit le principe de Huygens-Fresnel :

$$\underline{s}_1(X,Y) = \iint_{\mathcal{D}} \exp 2\jmath\pi \left(\frac{x\,X + y\,Y}{\lambda\,f'} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Mathématiquement, l'écran complémentaire est le complémentaire de $\mathcal{D}$ par rapport au plan soit $\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}$ et l'on croit pouvoir écrire

$$\underline{s}_2(X,Y) = \iint_{\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{D}} \exp 2\jmath\pi \left(\frac{x\,X + y\,Y}{\lambda\,f'} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Ce n'est pas physiquement réaliste car le plan xOy n'est pas réellement éclairé par une onde plane sur toute sa surface, mais sur une zone circulaire $\mathcal{C}$ qui a pour rayon R celui de la première lentille et donc

$$\underline{s}_2(X,Y) = \iint_{\mathcal{C}\backslash\mathcal{D}} \exp 2\jmath\pi \left(\frac{x\,X + y\,Y}{\lambda\,f'} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

L'astuce pour comparer les deux intensités des deux expériences consiste à sommer les deux intégrales précédentes

$$\underline{s}_1(X,Y) + \underline{s}_2(X,Y) = \iint_{\mathcal{D}} \cdots + \iint_{\mathcal{C}\backslash\mathcal{D}} \cdots = \iint_{\mathcal{C}} \exp 2\jmath\pi \left(\frac{x\,X + y\,Y}{\lambda\,f'} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où l'on reconnaît dans le total l'amplitude de la tache de diffraction par le diaphragme circulaire de rayon R, c'est-à-dire une tache d'Airy de rayon $r_1 = \frac{1{,}22\,\lambda\,f'}{D}$ où $D = 2\,R$ est le diamètre de la lentille. Faisons une application numérique. Avec $\lambda = 0,6\,\mu\text{m}$ (milieu du visible), $f' = 1\,\text{m}$ (pour avoir de belles grandes figures de diffraction) et $D = 0,1\,\text{m}$ (taille moyenne pour une lentille de TP), on a $r_1 \approx 7\,\mu\text{m}$ et l'on peut négliger l'amplitude au delà du troisième anneau, c'est-à-dire approximativement au delà de $4\,r_1 \approx 30\,\mu\text{m}$

Au delà donc d'un cercle de rayon $30\,\mu$m, on a pratiquement

$$\underline{s}_2(X,Y) + \underline{s}_1(X,Y) = 0$$

$$\underline{s}_2(X,Y) = -\underline{s}_1(X,Y)$$
$$|\underline{s}_2(X,Y)|^2 = |-\underline{s}_1(X,Y)|^2 = |\underline{s}_1(X,Y)|^2$$
$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1$$

Si par exemple le diaphragme $\mathcal{D}$ est un disque de $0,1$ mm de diamètre, sa tache de diffraction est une tache d'Airy d'environ 7 mm de rayon (en appliquant la formule précédente) ; l'écran complémentaire, par exemple un grain de poussière opaque de $0,1$ mm de diamètre posé sur une lame transparente donnera la même tache d'Airy sauf dans une zone centrale de $30\,\mu$m de rayon (0,4 % du rayon de la tache), zone théoriquement un peu plus sombre mais que l'œil ne verra pas car, en optique physiologique, le blanc «bave» sur le noir (c'est bien connu : le noir amincit) et une petite zone obscure à côté d'une énorme zone lumineuse sera masquée par le débordement du «blanc» sur le «noir».

Nous venons de démontrer le «théorème des écrans complémentaires» : deux écrans complémentaires donnent la même tache de diffraction.

Question 2 :
Un écran transparent est saupoudré de disques opaques de même rayon, dont les centres se répartissent au hasard. Décrire la figure de diffraction.

D'après le théorème des écrans complémentaires, on obtient la même tache qu'avec un diaphragme formé d'un ensemble (de leur réunion au sens ensembliste du terme) de trous $\mathcal{C}_i$, tous de même rayon a et de centres O_i de coordonnées (x_i, y_i). Dans l'hypothèse simplificatrice où aucun trou ne chevauche un autre, l'amplitude complexe en un point de l'écran est

$$\underline{s}(X,Y) = \iint_{\bigcup_i \mathcal{C}_i} \exp 2\,\jmath\,\pi \left(\frac{x\,X + y\,Y}{\lambda\,f'}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_i \left(\iint_{\mathcal{C}_i} \exp 2\,\jmath\,\pi \left(\frac{x\,X + y\,Y}{\lambda\,f'}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right)$$

On va faire apparaître que cette amplitude se factorise en produit de l'amplitude que l'on obtiendrait avec un seul trou par l'amplitude que l'on obtiendrait dans l'interférence de rayons issus des seuls centres. On s'inspire bien sûr d'une démonstration du cours (deux fentes d'Young larges). Pour chaque trou, on fait le changement de variable $x = x_i + x'$ et $y = y_i + y'$, ce qui revient à mettre l'origine en O_i ; l'important est qu'après le changement de variable, le domaine d'intégration est, pour chaque trou, défini par $x'^2 + y'^2 \leqslant a^2$ c'est-à-dire un cercle $\mathcal{C}_0$ et surtout *le même* pour tous les trous.

$$\underline{s}(X,Y) = \sum_i \left(\exp 2\,\jmath\,\pi \left(\frac{x_i\,X + y_i\,Y}{\lambda\,f'}\right) \iint_{\mathcal{C}_0} \exp 2\,\jmath\,\pi \left(\frac{x'\,X + y'\,Y}{\lambda\,f'}\right) \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \right) =$$
$$\left(\sum_i \exp 2\,\jmath\,\pi \left(\frac{x_i\,X + y_i\,Y}{\lambda\,f'}\right) \right) \iint_{\mathcal{C}_0} \exp 2\,\jmath\,\pi \left(\frac{x'\,X + y'\,Y}{\lambda\,f'}\right) \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'$$

et

$$\mathcal{I}(X,Y) = \left| \sum_i \cdots \right|^2 \left| \iint_{\mathcal{C}_0} \cdots \right|^2$$

Le second facteur n'est rien d'autre que la fonction qui correspond à la tache d'Airy d'un disque de rayon a, notons-le $\mathrm{Airy}(X,Y)$. Pour le premier, en notant $\varphi_i = 2\,\pi \left(\frac{x_i\,X+y_i\,Y}{\lambda\,f'}\right)$ et N le nombre de trous

$$\left|\sum_{i=1}^{i=N} \exp \jmath\varphi_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{i=N} \exp \jmath\varphi_i\right) \left(\sum_{i=1}^{i=N} \exp -\jmath\varphi_i\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{i=N} \exp \jmath\varphi_i \, \exp -\jmath\varphi_i + \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=i-1} (\exp \jmath\varphi_i \, \exp -\jmath\varphi_j + \exp \jmath\varphi_j \, \exp -\jmath\varphi_i) =$$

$$N + 2 \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=i-1} \cos(\varphi_i - \varphi_j)$$

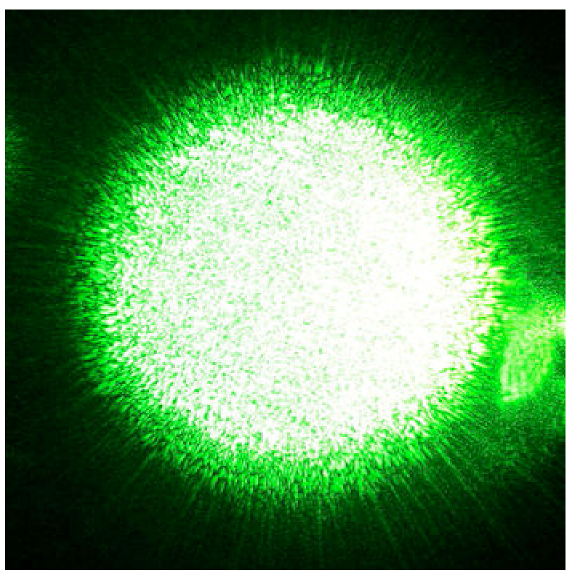
Il y a $C_N^2 = \frac{N\,(N-1)}{2}$ valeurs de $\varphi_i - \varphi_j$, réparties au hasard, donc à peu près uniformément sur le cercle trigonométrique, donc avec à peu près autant de cosinus positifs que négatifs, donc la double somme est, sinon nulle, au moins négligeable, notons-la ε ; on a donc

$$\mathcal{I}(X,Y) = (N + \varepsilon)\,\mathrm{Airy}(X,Y)$$

donc en gros la même tache, pratiquement N fois plus lumineuse.

Question 3 :

Montrer que l'intensité peut varier significativement entre deux points très proches, ce qui donne un aspect granuleux à la figure observée.



Comprenons qu'il faut lire la relation précédente

$$\mathcal{I}(X,Y) = (N + \varepsilon(X,Y))\,\mathrm{Airy}(X,Y)$$

avec $\varepsilon(X,Y)$ fonction petite mais rapidement variable. Basons nous sur une application numérique. Prenons toujours $\lambda = 0,6\,\mu$m, $f' = 1$ m et $a = 0,1$ mm de sorte que la tache d'Airy ait un rayon de 7 mm. A partir d'un point de coordonnées (X,Y) déplaçons nous, par exemple parallèlement à OX, d'environ $\Delta X = 1\%$ du rayon, de la tache, disons de 0,1 mm et prenons un trou à mi-rayon, disons avec $x_i = a/2 = 0,05$ mm, alors de X à $X + \Delta X$, φ_i varie de

$$\Delta\varphi_i = 2\,\pi \left(\frac{x_i\,\Delta X}{\lambda\,f'}\right) \approx 3^\circ$$

Les angles φ_i donc leurs différences et les cosinus de celles-ci varient de façon faible mais non négligeable ; il en résulte, d'un point à l'autre des fluctuations visibles d'intensités se traduisant par un aspect granuleux de la tache de diffraction. C'est ce qui explique, par exemple, l'aspect fatiguant pour la vue des taches obtenues avec la lumière d'un laser. Voir en exemple l'image ci-dessus.